

**МЕЖПРЕДМЕТНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО ПРЕДМЕТАМ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦИКЛА**

8 класс

М1. Найти все натуральные значения n , для которых число
$$n^4 - n^3 + n^2 + 2$$

является простым

Решение.

1. Разложим данное выражение на множители

$$\begin{aligned}n^4 - n^3 + n^2 + 2 &= n^4 - n^3 - n + 1 + n^2 + n + 1 \\ &= n^3(n - 1) - (n - 1) + (n^2 + n + 1) \\ &= (n - 1)(n^3 - 1) + (n^2 + n + 1) = (n^2 + n + 1)((n - 1)^2 + 1)\end{aligned}$$

2. Данное число будет простым, когда один из множителей равен 1, а другой множитель – простое число. Так как $(n^2 + n + 1) \geq 3$ для всех натуральных n , то $(n - 1)^2 + 1 = 1$, решение которого $n = 1$. При этом значении первый множитель равен 3 - простому числу.

М2. На двух смежных сторонах АВ и ВС параллелограмма ABCD вне его построены равносторонние треугольники АВМ и ВСN соответственно. Докажите, что треугольник DMN – равносторонний.

Решение.

Обозначим угол BAD параллелограмма через α .

1. $AM = AB = CD$, $AD = BC = CN$, $\angle DAM = \angle DCN = 60 + \alpha$. Следовательно, $\triangle ADM = \triangle DCN$ (по двум сторонам и углу между ними), следовательно, $DM = DN$.

2. $AM = BM$, $AD = BC = BN$, $\angle MBN = 360 - 60 - 60 - (180 - \alpha) = 60 + \alpha$. Следовательно, $\triangle BMN = \triangle ADM$ (по двум сторонам и углу между ними).

3. $NM = DM = ND$, т. е. $\triangle DMN$ – равносторонний.

Ф1. Черепаха проползла четыре участка пути, для которых интервалы времен относились $a:b:c:d$. Скорость на первом участке v_1 , на втором участке в n раз меньше, на четвертом в n раз больше, чем на первом. На третьем участке пути она равна средней путевой. Определить среднюю путевую скорость черепахи, если известно, что общее время отличается от времени на первом участке в n .

Решение: $v_{cp} = \frac{S}{t} = \frac{v_1 t_1 + \frac{v_1 b t_1}{na} + \frac{v_{cp} c t}{na} + \frac{n v_1 d t_1}{a}}{n t_1}$. Откуда получаем, что

$$v_{cp} = \frac{v_1 \left(1 + \frac{b}{na} + \frac{nd}{a}\right)}{n - \frac{c}{a}}.$$

Ф2. Чтобы приготовить ванну смешали горячую воду при температуре $80^\circ C$ с холодной водой, объем которой на 50% меньше, чем горячей, а температура на $60^\circ C$ ниже, чем горячая вода. Найти установившуюся температуру ванны.

Решение: $t_1 = 80^\circ C$, $t_2 = 20^\circ C$, $t_3 = ?$

На основании уравнения теплового баланса можно записать

$$c m_1 (t_1 - t_3) = c m_2 (t_3 - t_2), \text{ преобразуем последнюю запись}$$

$$c \rho V_1 (t_1 - t_3) = c \rho V_2 (t_3 - t_2). \text{ Откуда следует, что } V_0 (t_1 - t_3) = \frac{V_0}{2} (t_3 - t_2).$$

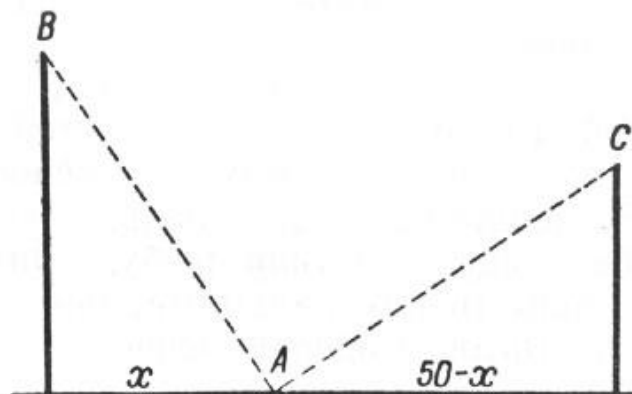
В результате преобразований получаем $t_3 = \frac{2t_1 + t_2}{3} = 60^\circ C$.

ФМ. У одного арабского математика XI века находим следующую задачу.

На обоих берегах реки растет по пальме, одна против другой. Высота одной - 30 локтей, другой - 20 локтей; расстояние между их основаниями - 50 локтей. На верхушке каждой пальмы сидит птица. Внезапно обе одинаковой породы птицы заметили рыбу, выплывшую к поверхности воды между пальмами; они кинулись к ней разом и достигли ее одновременно. На каком расстоянии от основания более высокой пальмы появилась рыба?

Решение.

$$1. AB^2 = 30^2 + x^2, AC^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$



2. $AB = AC$, так как обе птицы пролетели эти расстояния в одинаковое время. Поэтому $30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2$.

3. Раскрыв скобки, получаем уравнение первой степени $100x = 2000$, откуда $x = 20$.

Рыба появилась в 20 локтях от той пальмы, высота которой 30 локтей.

Критерии оценивания олимпиадных заданий Максимальная оценка за каждое задание – 7 баллов

Общий подход

7 баллов – задача решена правильно;

6 баллов – задача решена, но есть мелкие замечания к решению (например, не рассмотрены некоторые частные случаи);

5 баллов – задача решена в целом, недостатки решения легко устраняются;

3-4 балла – задача решена «наполовину», т.е. ход решения правильный, есть значительный прогресс в решении, но полное решение требует дополнительных существенных идей;

1-2 балла – задача не решена, но подход к решению правильный или задача решена для простых частных случаев;

0 баллов – решение задачи неправильное и не содержит идей, с помощью которых задача может быть решена, или задача не решалась.

8 класс

№	Критерий	Баллы
М1	Обосновано получен правильный ответ	7
	Выражение разложено на множители	4
	Подбором найдено верное решение	1
	Решение задачи неправильное и не содержит идей, с помощью которых задача может быть решена, или задача не решалась	0
М2	Доказано, что $\triangle DMN$ равносторонний, правильно использованы признаки равенства треугольников.	7
	Доказано равенство двух сторон $\triangle DMN$.	3
	Сделан правильный чертеж, введено обозначение угла параллелограмма.	1
	Решение задачи неправильное и не содержит идей, с помощью которых задача может быть решена, или задача не решалась.	0
Ф1	Задача решена верно в общем виде.	7
	-	6
	-	5
	Записано верное решение, однако, допущена математическая ошибка в преобразованиях.	3
	Записана формула для средней путевой скорости.	1
	Решение задачи неправильное и не содержит идей, с помощью которых задача может быть решена, или задача не решалась.	0

Ф2	Задача решена правильно (записано правильно условие задачи, выполнен перевод в систему “Си”, записаны формулы для теплового баланса, приведено правильное логически рациональное решение, которое исключает промежуточные расчеты, математически грамотно проведены преобразования, выполнен математический расчет, записан ответ, который имеет физически реальный смысл).	7
	-	6
	Задача решена правильно (записано правильно условие задачи, выполнен перевод в систему “Си”, записаны формулы теплового баланса, приведено решение, которое допускает промежуточные расчеты, математически грамотно проведены преобразования, допущена негрубая арифметическая ошибка в математическом расчете)	5
	-	3
	Записано правильно условие задачи, выполнен перевод в систему “Си”, указаны физические формулы, на основании которых базируется решение	1
	Решение задачи неправильное и не содержит идей, с помощью которых задача может быть решена, или задача не решалась.	0
МФ	Задача решена верно. Записано условие задачи, составлена рабочая формула, математически грамотно проведены преобразования, выполнен математический расчет, записан ответ, который имеет физически реальный смысл).	7
	Задача решена верно, математически грамотно проведены преобразования, допущена негрубая арифметическая ошибка в математическом расчете.	5
	Приведено решение, которое имеет недостатки, связанные с незаконченностью, но правильно выбранным ходом.	3
	Записано правильно условие задачи, указаны физические формулы, на основании которых базируется решение, неправильно выражена искомая величина.	1
	Решение задачи неправильное и не содержит идей, с помощью которых задача может быть решена, или задача не решалась.	0